УДК 539.17.01:539.142:539.143



# ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР <sup>6, 7, 9, 10</sup>Ве МЕТОДОМ ФЕЙНМАНОВСКИХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© 2020 г. В. В. Самарин<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

<sup>2</sup>Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области "Университет "Дубна", Дубна, Россия

> \**E-mail: samarin@jinr.ru* Поступила в редакцию 30.10.2019 г. После доработки 25.11.2019 г. Принята к публикации 27.12.2019 г.

Энергия и квадрат модуля волновой функции основного состояния ядер<sup>6, 7, 9, 10</sup>Ве вычислены методом континуальных интегралов Фейнмана в модели взаимодействия альфа-кластеров и внешних нуклонов. Для энергии получено согласие с экспериментальными данными. Продемонстрировано проявление в структуре ядра<sup>7</sup>Ве кластера<sup>3</sup>Не. Для ядер<sup>7, 9, 10</sup>Ве также были проведены расчеты в оболочечной модели деформированного ядра. Обе модели позволили объяснить отрицательное значение параметра квадрупольной деформации ядра<sup>7</sup>Ве и положительное значение параметра квадрупольной деформации ядер<sup>9, 10</sup>Ве.

DOI: 10.31857/S0367676520040274

## введение

Низкоэнергетические реакции с участием ядер трития, гелия, лития и бериллия [1] составляют значительную часть изученных и продолжающих изучаться в настоящее время ядерных реакций. Реакции с изотопами Ве представляют значительный интерес с нескольких точек зрения. Радиоактивное ядро <sup>7</sup>Ве (с периодом полураспада  $T_{1/2} = 53$  д) является зеркальным по отношению к стабильному ядру <sup>7</sup>Li, которое можно представить состоящим из α-кластера и тритонного кластера [2-4]. Ядра <sup>9</sup>Ве и <sup>10</sup>Ве представляют состоящими из двух α-кластеров и, соответственно из одного и двух внешних (валентных) слабосвязанных нейтронов [5-7]. Знание свойств и волновой функции основного состояния нуклидов бериллия необходимо для теоретического описания реакций с их участием.

Уравнение Шредингера в рамках задачи трех тел с ортогональным проектированием впервые было решено для ядра <sup>6</sup>Li в работе [8]. В работе [9] уравнение Шредингера для трехтельной системы <sup>6</sup>He ( $n + n + \alpha$ ) было решено с помощью разложений по гиперсферическим функциям. В работах [10, 11] волновые функции системы трех тел были получены с помощью гауссового базиса и численного решения системы интегральных уравнений Хилла–Уилера (Hill–Wheeler). Более простую возможность вычисления энергии  $E_0$  и плотности вероятности  $|\Psi_0(\vec{r_1},...,\vec{r_n})|^2$  для основного состояния *n*-частичной системы дает метод континуальных интегралов Фейнмана [12–17]. Его универсальность позволила в едином подходе выполнить расчеты для ряда малонуклонных ядер: <sup>3</sup>H, <sup>3, 4, 6</sup>He, <sup>6, 7, 11</sup>Li [3, 4, 16, 17]. В данной работе подобные многотельные расчеты проведены для ядер <sup>7, 9, 10</sup>Be.

## МЕТОД КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА

Энергия  $E_0$  и квадрат модуля волновой функции основного состояния  $|\Psi_0|^2$ , зависящей от координаты q, могут быть найдены с помощью введенных Р. Фейнманом континуальных интегралов (интегралов по траекториям) [12, 13]. Континуальный интеграл (пропагатор) в мнимом (евклидовом) времени  $t = -i\tau$  [14, 15] для частицы массой m с потенциальной энергией V(q) можно представить (см. [4, 7]) в виде

$$K_{\rm E}(q,\tau;q,0) \approx \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)^{1/2} \times \left\langle \exp\left[-\frac{\Delta\tau}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}V(q_k)\right] \right\rangle_{0,N}.$$
(1)

Здесь  $\tau = N\Delta \tau$  и угловыми скобками (...) обозначено усреднение по случайным (N-1)-мерным векторам ("траекториям") [7], которое может быть выполнено методом Монте-Карло. Для реализации расчетов средних по случайным траекториям в данной работе использована технология CUDA параллельных вычислений на графических процессорах [18–20]. Расчеты были выполнены на гетерогенном кластере "HybriLIT" [21] Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

Энергии  $E_0$ ,  $E_1$  и квадраты модуля волновой функции  $|\Psi_0(q)|^2$ ,  $|\Psi_1(q)|^2$  основного и первого возбужденного состояний определяют первые члены асимптотики пропагатора в пределе  $\tau \to \infty$  [14, 15]

$$K_{E}(q,\tau;q,0) \rightarrow |\Psi_{0}(q)|^{2} \times \exp\left(-\frac{E_{0}\tau}{\hbar}\right) + |\Psi_{1}(q)|^{2} \exp\left(-\frac{E_{1}\tau}{\hbar}\right) + \dots, \qquad (2)$$
$$\tau \rightarrow \infty.$$

Для удобства расчетов в масштабах действия ядерных сил удобно использовать безразмерные переменные  $\tilde{q} = q/x_0$ ,  $\tilde{V} = V(q)/\varepsilon_0$ ,  $\tilde{E}_0 = E_0/\varepsilon_0$  $\tilde{m} = m/m_0$ ,  $\tilde{\tau} = \tau/t_0$ ,  $\Delta \tilde{\tau} = \Delta \tau/t_0$ ,  $\tilde{K}_{\rm E} = K_{\rm E} x_0$ , где  $x_0 = 1$  фм,  $\varepsilon_0 = 1$  МэВ,  $m_0$  — масса нейтрона,  $t_0 = m_0 x_0^2/\hbar \approx 1.57 \cdot 10^{-23}$  с,  $b_0 = t_0 \varepsilon_0/\hbar \approx 0.02412$ , тогда в области линейной части графика зависимости пропагатора от  $\tilde{\tau}$ 

$$b_0^{-1} \ln \tilde{K}_{\rm E}\left(\tilde{q}, \tilde{\tau}; \tilde{q}, 0\right) \approx b_0^{-1} \ln \left|\Psi_0(\tilde{q})\right|^2 - \tilde{E}_0 \tilde{\tau}, \qquad (3)$$

$$\widetilde{K}_{\mathrm{E}}(\widetilde{q},\widetilde{\tau};\widetilde{q},0) \approx \left(\frac{\widetilde{m}}{2\pi\widetilde{\tau}}\right)^{1/2} \times \\
\times \left\langle \exp\left[-\Delta\widetilde{\tau}b_{0}\sum_{k=1}^{N}\widetilde{V}(\widetilde{q}_{k})\right] \right\rangle_{0,N}.$$
(4)

Наличие линейной части графика зависимости (3) позволяет непосредственно вычислить квадрат модуля ненормированной волновой функции основного состояния  $|\Psi_0(q)|^2$ ,

$$\left|\Psi_{0}(\tilde{q})\right|^{2} = \operatorname{const}\tilde{K}_{\mathrm{E}}\left(\tilde{q},\tilde{\tau};\tilde{q},0\right),\tag{5}$$

а с помощью линейной регрессии найти энергию основного состояния  $E_0$  [3, 7, 16, 17].

Формулы (1)–(5) естественным образом обобщаются на случаи большего числа степеней свободы. Поскольку волновая функция основного состояния не имеет узловых точек (линий или поверхностей) и не меняет знака, ненормированная волновая функция может быть найдена по формуле

$$\Psi_0(q) = \sqrt{K_E(q,\tau;q,0)}.$$
 (6)

Точность данного метода для трехмерного изотропного осциллятора с дискретным спектром состояний продемонстрирована в работе [7]. Типичные модельные парные потенциалы взаимодействия нуклонов с нуклонами, нуклонов с α-кластером и α-кластера с α-кластером имеют область притяжения с конечным радиусом и отталкивательный кор на малых расстояниях между частицами. Для проверки применимости и оценки степени точности метода для подобных потенциалов в случаях дискретного и непрерывного спектров рассмотрим модельные системы из нескольких взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом частиц массы *m*, равной массе нейтрона. В качестве парных потенциалов выберем потенциалы, для которых известны аналитические выражения для энергии основного состояния Е<sub>0</sub>. В модифицированном потенциале Пешля-Теллера [22], соответствующем притяжению между частицами

$$V_{\rm PT}(r) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda - 1)}{{\rm ch}^2 \alpha r},$$
(7)

энергия основного состояния равна

$$E_{0} = -\frac{\hbar^{2}\alpha^{2}}{2m}(\lambda - 2)^{2}.$$
 (8)

График потенциала (7), которому соответствует энергия основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -20$  МэВ, показан на рис. 1*а*. Расчет методом Монте-Карло для  $n = 2 \cdot 10^6$  траекторий с шагом сетки  $\Delta \tilde{\tau} = 0.01$  дал значение  $E_0^{(1)} = 20.7 \pm 0.3$  МэВ достаточно близкое к точному.

В потенциале Морса [22] с отталкивательным кором

$$V_{\rm M}(r) = D[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)],$$
  
 $x = \frac{r - r_0}{r_0},$  (9)

энергии s-состояний находятся из уравнения

$$F(a(E), c(E), y_0) = 0,$$
 (10)

где *F* — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$a(E) = \frac{1}{2} + \frac{\beta(E) - \gamma}{\alpha}, \quad c(E) = 1 + 2\frac{\beta(E)}{\alpha}, \quad (11)$$

$$\beta^2 = -\frac{2mr_0^2}{\hbar^2}E, \quad \gamma^2 = \frac{2mr_0^2}{\hbar^2}D, \quad y_0 = \frac{2\gamma}{\alpha}\exp(\alpha).$$
 (12)

Графики потенциалов (9), которым соответствуют энергии основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ и  $E_0^{(1)} = -5$  МэВ показаны на рис. 1*а*. В частности, энергия равна  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ для значений параметров D = 32.82 МэВ,  $\alpha = 3.28$ ,  $r_0 =$ 

 $V_{\rm PT}, V_{\rm M}, {\rm M} 
ightarrow {\rm B}$ 

= 1.58 фм. Для системы из двух взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом частиц энергия основного состояния равна  $E_0^{(2)} = 2E_0^{(1)}$ , для потенциалов Морса, показанных на рис. 1*a*,  $E_0^{(2)} = -2$  МэВ и  $E_0^{(2)} = -10$  МэВ, соответственно. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta \tilde{\tau} = 0.01$  показаны на рис. 1*b*. С помощью линейной регрессии, примененной к линейному участку графика, были получены значения  $E_0^{(2)} = -1.7 \pm 0.3$  МэВ и  $E_0^{(2)} = -10.7 \pm 0.7$  МэВ соответственно. Они достаточно хорошо согласуются с точными значениями. Недооценка точного значения -2 МэВ может быть обусловлена заметным вкладом в пропагатор состояний непрерывного спектра с  $E^{(2)} \ge 0$ .

# ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ЯДЕР 6,7Ве

Принцип Паули для ядер <sup>6, 7</sup>Ве можно не учитывать, если рассматривать их как систему из остова ( $\alpha$ -кластера) и внешних нуклонов с конфигурациями {p, p} и {p, p, n} соответственно. В таком случае в рассматриваемых системах будет не более двух тождественных нуклонов. Ядерная часть потенциальной энергии взаимодействия внешних нуклонов в ядре <sup>7</sup>Ве может быть представлена в виде суммы парных взаимодействий нуклонов друг с другом [3, 23]

$$V_{p,p,n}^{(N)} = V_{p-p}^{(0^{+})} \left( \left| \vec{r}_{1} - \vec{r}_{2} \right| \right) + V_{p-n}^{(1^{+})} \left( \left| \vec{r}_{1} - \vec{r}_{3} \right| \right) + V_{p-n}^{(0^{+})} \left( \left| \vec{r}_{2} - \vec{r}_{3} \right| \right).$$
(13)

Здесь  $V_{p-n}^{(l^+)}(r)$  — триплетный потенциал взаимодействия протона с нейтроном, имеющий место в дейтроне,  $V_{p-n}^{(0^+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  и  $V_{p-p}^{(0^+)}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  — это не имеющие связанных состояний синглетные потенциалы взаимодействия соответственно протона с нейтроном и протона с протоном.

Потенциал взаимодействия протона с  $\alpha$ -кластером  $V_{p-\alpha}(r)$  включал ядерную (N) и кулоновскую (C) части

$$V_{p-\alpha}(r) = V_{p-\alpha}^{(N)}(r) + V_{p-\alpha}^{(C)}(r).$$
(14)

Для кулоновской части взаимодействия использовалось известное выражение для энергии точечного заряда в поле равномерно заряженного шара. Ядерная часть эффективного потенциала взаимодействия нуклона с ядерным остовом  $V_{n-\alpha}(r) \equiv V_{p-\alpha}^{(N)}(r)$  в работе [3] была выбраны в виде комбинации

$$U(r) = -U_1 f(r; B_1, a_1) + + U_2 f(r; B_2, a_2) - U_3 f(r; B_3, a_3) f(r; B_4, a_4),$$
(15)

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ том 84 № 8

2020

**Рис. 1.** (*a*) Графики потенциалов:  $V_{\text{PT}}(r)$  (7) для энергии основного состояния частицы  $E_0^{(1)} = -20$  МэВ (сплошная кривая) и  $V_{\text{M}}(r)$  (9) для энергии основного состояния нейтрона  $E_0^{(1)} = -1$  МэВ (штриховая кривая), и  $E_0^{(1)} = -5$  МэВ (штрих-пунктирная кривая), горизонтальные отрезки – соответствующие уровни энергии; (*б*) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_{\text{E}}$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$  для системы из двух частиц, взаимодействующих только с бесконечно тяжелым остовом потенциалом  $V_{\text{M}}(r)$  (7), для энергии основного состояния  $E_0^{(2)} = -2$  МэВ (точки), и  $E_0^{(2)} = -10$  МэВ (кружки): прямые – результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

функций типа типа Вудса-Саксона (фермиевского распределения)

$$f(r; B, a) = \left[1 + \exp\left(\frac{r-B}{a}\right)\right]^{-1}.$$
 (16)



а



Рис. 2. (а) Графики ядерного псевдопотенциала U(r)(15) взаимодействия протона с  $\alpha$ -кластером в ядрах <sup>6</sup>Ве, <sup>7</sup>Ве (сплошная линия) и потенциала  $V_{p-n}^{(1^+)}$  взаимодействия протона с нейтроном в ядре <sup>2</sup>Н (штриховая линия). (б) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$ для <sup>6</sup>Ве (точки) и <sup>7</sup>Ве (кружки): прямые – результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

## Графики функции U(r) взаимодействия протона

с  $\alpha$ -кластером в ядрах <sup>6</sup>Be, <sup>7</sup>Be и потенциала  $V_{p-n}^{(1^+)}$ взаимодействия протона с нейтроном в ядре <sup>2</sup>H показаны на рис. 2*a*. Выражение (15) имеет смысл псевдопотенциала сильного взаимодействия  $\alpha$ кластера с нейтроном и протоном, аналогичного псевдопотенциалу [24], используемому в физике металлов для описания взаимодействия внешних электронов (из зоны проводимости) с атомными остовами. Второе положительное слагаемое в (15) объясняется наличием отталкивательных ко́ров в потенциалах нуклон-нуклонного взаимодействия и следствием принципа Паули. Энергия основного состояния в системе остов-нуклон оказывается близкой к энергии самого верхнего заполненного уровня оболочечной модели ядра. При этом состояния нуклонов ядерного остова, соответствующие нижележащим уровням, оказываются исключенными (запрещенными).

Вычисления производились в системе центра масс. Для ядра <sup>6</sup>Ве (системы  $p + p + \alpha$ ) с радиусвекторами протонов  $\vec{r}_{p_1}$ ,  $\vec{r}_{p_2}$  и радиус-вектором  $\alpha$ -кластера  $\vec{r}_{\alpha}$  координаты Якоби (см., например [13]) равны

$$\vec{x} = \vec{r}_{p_2} - \vec{r}_{p_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_{\alpha} - \frac{1}{2} (\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2}).$$
 (17)

Для ядра <sup>7</sup>Ве (системы  $p + p + n + \alpha$ ) использовались координаты Якоби

$$\vec{x} = \vec{r}_{p_2} - \vec{r}_{p_1}, \quad \vec{y} = \frac{1}{2} (\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2}) - \vec{r}_n, 
\vec{z} = \frac{1}{3} (\vec{r}_{p_1} + \vec{r}_{p_2} + \vec{r}_n) - \vec{r}_\alpha,$$
(18)

при этом из-за небольшой разницы масс протона и нейтрона их массы считались одинаковыми. Вычисление плотности вероятности по формуле (5) для ядра <sup>6</sup>Be с потенциальной энергией, симметричной по отношению к перестановке протонов, дает координатную волновую функцию, симметричную по отношению к перестановке протонов. Для ядра <sup>7</sup>Be с потенциальной энергией

$$V_{p,p,n,\alpha} = V_{p,p,n}^{(N)} + V_{p-\alpha} \left( \left| \vec{r}_{p_{1}} - \vec{r}_{\alpha} \right| \right) + V_{p-\alpha} \left( \left| \vec{r}_{p_{2}} - \vec{r}_{\alpha} \right| \right) + U \left( \left| \vec{r}_{n} - \vec{r}_{\alpha} \right| \right),$$
(19)

симметричную по отношению к перестановке протонов волновую функцию можно получить, образовав симметричную комбинацию в координатах Якоби

$$\Psi_{\rm S}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \Phi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + \Phi_0(-\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \qquad (20)$$

где

$$\Phi_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sqrt{K_E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \tau; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, 0)}.$$
 (21)

Для определения энергии  $E_0$  основного состояния ядер<sup>6,7</sup>Ве численные расчеты пропагатора (4) проводились с числом траекторий  $n \sim 10^6 - 10^8$  и шагом сетки по мнимому времени  $\Delta \tilde{\tau} = 0.01$ . Результаты показаны на рис. 2. Экспериментальное значение энергии разделения  $E_s$  ядра<sup>7</sup>Ве на  $\alpha$ -кластер, два протона и нейтрон равно 9.31 МэВ [25]. Ядро <sup>6</sup>Ве нестабильно, энергия системы из  $\alpha$ -кластера и двух протонов положительна  $E_0 = 0.593$  МэВ [25]. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta \tilde{\tau} = 0.01$  по-казаны на рис. 26. С помощью линейной регрес-

сии, примененной к линейному участку графика, были получены достаточно близкие к экспериментальным значения  $E_0 = 1.3 \pm 0.5$  МэВ для <sup>6</sup>Ве и  $E_0 = -9.5 \pm 0.5$  МэВ для <sup>7</sup>Ве.

Распределение плотности вероятности  $\tilde{K}_{\rm E}(x, y; \tilde{\tau})$ для трехтельной конфигурации короткоживущего ядра <sup>6</sup>Ве ( $p + p + \alpha$ ) с положительной энергией основного состояния (см. рис. 2*б*) показано на рис. 3. Во время существования короткоживущего ядра <sup>6</sup>Ве (резонанса при тройном столкновении) наиболее вероятными являются конфигурации с объединением протонов в двухпротонный кластер и сигарообразная конфигурация ( $p-\alpha-p$ ).

Плотность вероятности  $|\Psi_0|^2$  для четырехтельной конфигурации ядра <sup>7</sup>Ве ( $p + p + n + \alpha$ ) сходна с приведенной в работах [3, 4] плотностью вероятности для ядра <sup>7</sup>Li ( $n + n + p + \alpha$ ). Наиболее вероятным является расположение внешних нуклонов в виде кластера <sup>3</sup>He [3, 7] (правильного треугольника), тесно соединенного с почти сферическим кластером <sup>4</sup>He. Это позволяет заключить, что ядро <sup>7</sup>Ве также сильно деформировано, как и сильно деформированное ядро <sup>7</sup>Li с параметром квадрупольной деформации  $\beta_2 \approx -1$  [26]. Сплюснутая форма ядра <sup>7</sup>Ве может соответствовать усреднению по всевозможным поворотам системы <sup>3</sup>He +  $\alpha$  вокруг направления, перпендикулярного межкластерной оси.

В качестве дополнительной модели ядра <sup>7</sup>Ве была использована оболочечная модель с аксиально-симметричной ядерной частью потенциала в форме Вудса-Саксона (см. например, [25]). Кулоновская часть потенциала для протонов представляла собой электрическое поле однородно заряженного сплюснутого эллипсоида и вычислялась численно. Численное решение уравнения Шредингера для нуклонов при  $\beta_2 = -1$  выполнялось методом, приведенным в [27]. Значения параметров потенциала определялись из условия равенства энергий отделения нуклонов с верхних заполненных уровней экспериментальным значениям энергии отделения. Полученная схема уровней протонов (энергия отделения протона равна 5.61 МэВ, [25]) приведена на рис. 4а, плотности вероятности для заполненных низших уровней с квантовыми числами  $|m_i| = 1/2$ ,  $|m_i| = 3/2$  ( $|m_i|$  — модуль проекции полного углового момента нуклона на ось симметрии ядра) показаны на рис. 4б. Уровни и плотность вероятности для нейтронов имеют аналогичный вид. Двум нейтронам и двум протонам на глубоких низших уровнях, соответствующих уровню 1s<sub>1/2</sub> сферического ядра с проекцией полного момента на ось симметрии ядра  $|m_i| = 1/2$ , отвечает ядерный остов, близкий к поляризованному α-кластеру. Внешние нейтрон и два протона

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ том 84 № 8 2020



**Рис. 3.** Топография (в логарифмическом масштабе) пропагатора  $\tilde{K}_{\rm E}(x, y; \tilde{\tau})$  системы <sup>6</sup>Be  $(p + p + \alpha)$  для  $\tilde{\tau} = 20$  в координатах Якоби  $\vec{x} \perp \vec{y}$  (*a*) и  $\vec{x} \parallel \vec{y}$  (*b*). Наиболее вероятными являются конфигурации с объединением протонов в двухпротонный кластер *I* и сигарообразная конфигурация *2*. Область *3* соответствует короткоживущему состоянию (резонансу) при столкновении протонов вдали от скластера. Областям *4* и *5* соответствуют аналогичные резонансы при столкновениях протона с  $\alpha$ -кластером вдали от другого протона.

ядра <sup>7</sup>Ве на подуровне с проекцией полного момента на ось симметрии ядра  $|m_j| = 3/2$ , соответствующем уровню  $1p_{3/2}$  сферического ядра, определяют сплюснутую форму ядра <sup>7</sup>Ве. Таким образом, и четырехтельная и оболочечная модели объясняют отрицательное значение параметра квадрупольной деформации ядра <sup>7</sup>Ве.



**Рис. 4.** (*a*) Схемы уровней энергии протонов ядра <sup>7</sup>Ве в оболочечной модели деформированного ядра с параметром квадрупольной деформации  $\beta_2 \approx -1$ , сплошные отрезки – занятые уровни, штриховой – свободный. (*б*) Плотности вероятности (в логариф-мическом масштабе) в цилиндрических координатах (по горизонтали – ось симметрии) для двух заполненных уровней протонов с квантовыми числами модуля проекции полного углового момента нуклона на ось симметрии ядра  $|m_i| = 1/2$  (внизу) и  $|m_i| = 3/2$  (вверху).

### ОСНОВОЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР 9, 10 Ве

Ядра <sup>9</sup>Ве и <sup>10</sup>Ве представим состоящими из двух α-кластеров и из одного и двух нейтронов соответственно. Потенциальная энергия взаимодействия двух α-кластеров на расстояниях, превышающих удвоенный среднеквадратичный зарядовый радиус ядра <sup>4</sup>Не (1.68 фм, см. например [25]), может быть выбрана в форме комбинации потенциала Вудса-Саксона с параметрами Акюза-Винтера [28] и потенциала кулоновского отталкивания двух точечных зарядов  $V_{\alpha-\alpha}(r) = V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) + V_{\alpha-\alpha}^{(C)}(r)$ . На малых расстояниях кулоновская часть  $V^{(\mathrm{C})}_{\alpha-lpha}(r)$  может быть представлена в форме потенциала взаимодействия двух равномерно заряженных шаров. Ядерную часть взаимодействия α-кластеров с учетом усредненного действия отталкивательного кора нуклон-нуклонного взаимодействия и принципа Паули можно описать с помощью псевдопотен-

циала  $V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r)$  в форме суммы двух функций типа Вудса—Саксона

$$V_{\alpha-\alpha}^{(N)}(r) = -U_{\alpha l}f(r; B_{\alpha l}, a_{\alpha l}) + U_{\alpha 2}f(r; B_{\alpha 2}, a_{\alpha 2}),$$
(22)



**Рис. 5.** а) Графики псевдопотенциала (22) взаимодействия двух  $\alpha$ -кластеров в ядрах <sup>9</sup>Ве (сплошная линия) и <sup>10</sup>Ве (штриховая линия)  $\delta$ ) Зависимости нормированного логарифма пропагатора  $b_0^{-1} \ln \tilde{K}_E$  от мнимого времени  $\tilde{\tau}$  для ядер <sup>9</sup>Ве (кружки) и <sup>10</sup>Ве(точки), прямые — результаты линейной регрессии, примененной к линейному участку графика.

его типичные графики показаны на рис. 5а.

Для ядра <sup>9</sup>Ве (системы  $\alpha + n + \alpha$ ) с радиус-векторами  $\alpha$ -кластеров  $\vec{r}_{\alpha_1}$ ,  $\vec{r}_{\alpha_2}$  и радиус-вектором нейтрона  $\vec{r}_{\alpha}$  координаты Якоби равны

$$\vec{x} = \vec{r}_{\alpha_2} - \vec{r}_{\alpha_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_n - \frac{1}{2} (\vec{r}_{\alpha_1} + \vec{r}_{\alpha_2}).$$
 (23)

Для ядра <sup>10</sup>Ве (системы  $\alpha + n + n + \alpha$ ) использовались координаты Якоби

$$\vec{x} = \vec{r}_{\alpha_2} - \vec{r}_{\alpha_1}, \quad \vec{y} = \vec{r}_{n_2} - \vec{r}_{n_1}, 
\vec{z} = \frac{1}{2} (\vec{r}_{n_1} + \vec{r}_{n_2}) - \frac{1}{2} (\vec{r}_{\alpha_2} + \vec{r}_{\alpha_1}).$$
(24)



**Рис. 6.** Топография (в логарифмическом масштабе) плотности вероятности  $|\Psi_0(x, y, \theta; \tilde{\tau})|^2$  основного состояния ядра <sup>9</sup>Ве для  $\tilde{\tau} = 30$ . Указаны векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  в координатах Якоби и примеры положения нейтронов (маленькие кружки) и  $\alpha$ -кластеров (большие кружки). Наибольшую вероятность имеет конфигурация 1 с валентным нейтроном между  $\alpha$ -кластерами  $\alpha + n + \alpha$ , конфигурация 2  $\alpha + {}^{5}$ Не имеет меньшую вероятность.

Вычисление плотности вероятности по формуле (5) с потенциальной энергией, симметричной по отношению к перестановке α-кластеров (и нейтронов для ядра <sup>10</sup>Ве), дает координатную волновую функцию, симметричную по отношению к перестановке α-кластеров (и нейтронов для ядра <sup>10</sup>Ве).

Экспериментальные значения энергии разделения ядер <sup>9</sup>Ве и <sup>10</sup>Ве на  $\alpha$ -кластеры и нейтроны равны 1.57 МэВ для ядра <sup>9</sup>Ве и 8.38 МэВ для ядра <sup>10</sup>Ве [25]. Результаты расчетов пропагатора для  $n = 7 \cdot 10^7$  траекторий с шагом сетки  $\Delta \tilde{\tau} = 0.01$  по-казаны на рис. 56. С помощью линейной регрессии, примененной к линейному участку графика, были получены близкие к экспериментальным значения  $E_0 = -1.57 \pm 0.3$  МэВ и  $E_0 = -8.3 \pm 0.7$  МэВ соответственно. Значения параметров потенциала (22) составили:  $B_{\alpha 1} = 3.73$  фм,  $B_{\alpha 2} = 2.71$  фм,  $a_{\alpha 1} = a_{\alpha 2} = 0.512$  фм,  $U_{\alpha 2} = 38$  МэВ для обоих ядер,

 $U_{\alpha 1} = 27.44$  МэВ для <sup>9</sup>Ве и  $U_{\alpha 1} = 33$  МэВ для <sup>10</sup>Ве. Небольшие различия в значениях последнего параметра можно объяснить различной поляризацией  $\alpha$ -кластеров в ядрах <sup>9</sup>Ве и <sup>10</sup>Ве. Графики псевдопотенциалов (22) для ядер <sup>9</sup>Ве и <sup>10</sup>Ве показаны на рис. 5*a*, пропагаторы показаны на рис. 5*b*. Потенциалы взаимодействия  $\alpha$ -кластеров с отталкивательным кором, подобные, показанным на рис. 5*a* рассматривались в работах [29, 30].

Распределение плотности вероятности для трехтельных конфигураций <sup>9</sup>Ве ( $\alpha + n + \alpha$ ) показано на рис. 6. Наибольшую вероятность имеет конфигурация с валентным нейтроном между  $\alpha$ -кластерами  $\alpha + n + \alpha$ , конфигурация  $\alpha + {}^{5}$ Не имеет меньшую вероятность. Для веса *w* конфигурации  $\alpha + {}^{5}$ Не можно использовать оценку

$$w = C^{-1} \iiint_{G} dx dy d\theta \sin \theta x^{2} y^{2} \left| \Psi(x, y, \theta) \right|^{2}, \qquad (25)$$



**Puc. 7.** Топография (в логарифмическом масштабе) плотности вероятности  $|\Psi_0(x, y, z, \theta; \tilde{\tau})|^2(a, e)$  основного состояния ядра <sup>10</sup>Ве при  $\tilde{\tau} = 18$  в координатах Якоби  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , для частной конфигурации  $\vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y} \perp \vec{z}$  (*b*) при  $\theta = 90^\circ$  (*a*) и  $\theta = 0^\circ$  (*e*) с примерами положения нейтронов (маленькие кружки) и α-кластеров (большие кружки). Наибольшую вероятность имеет конфигурация 1 с валентными нейтронами (динейтронным кластером  $n^2$ ) между α-кластерами ( $\alpha + n^2 + \alpha$ ), конфигурация 2 ( $\alpha + {}^6$ Не) менее вероятна.

где  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,

$$C = \int_{0}^{\infty} dx x^{2} \int_{0}^{\infty} dy y^{2} \int_{0}^{\pi} d\theta \sin \theta \left| \Psi(x, y, \theta) \right|^{2}, \qquad (26)$$

и область G — множество точек  $(\vec{x}, \vec{y})$ , удовлетворяющих условиям  $|y \cos \theta| > x/2$  при  $0 \le x \le d$  и  $|y \cos \theta| > x/2 - c$  при x > d. Для значений параметров c = 2 фм, d = 5 фм расчет дал оценку  $w_{\text{theor}} \approx 0.27$ , которая согласуется с экспериментальным значением  $w_{\text{exp}} \approx 0.25$  из работы [31].

Распределение плотности вероятности для четырехтельных конфигураций <sup>10</sup>Ве ( $\alpha + n + n \alpha$ ) показано на рис. 7. Видно, что наибольшую вероятность имеет конфигурация с близко расположенными валентными нейтронами (динейтронным кластером  $n^2$ ) между  $\alpha$ -кластерами ( $\alpha + n^2 + \alpha$ ),



**Рис. 8.** (*a*) Энергии занятых нейтронных уровней ядер <sup>9,10</sup>Ве в оболочечной двуцентровой модели в зависимости от расстояния *R* между центрами двух потенциальных ям типа Вудса–Саксона, сплошная кривая для  $|m_j| = 3/2$ , штриховая и штрих-пунктирная кривые для  $|m_j| = 1/2$ . (*б*, *в*) Плотности вероятности (в логарифмическом масштабе) в цилиндрических координатах (по горизонтали – ось симметрии) для трех низших уровней нейтронов для R = 3 (*б*) и R = 4 фм (*в*).

конфигурация  $\alpha$  + <sup>6</sup>He имеет меньшую вероятность.

Представленные на рис. 6, 7 модели согласуются с представлениями о форме ядер <sup>9, 10</sup>Ве как о ядерной молекуле [32—35], состоящей из двух  $\alpha$ -кластеров и внешних (валентных) нейтронов.

Результаты расчетов состояний нейтронов в двуцентровой оболочечной модели ядер <sup>9,10</sup>Ве представлены на рис. 8. Распределение плотности вероятности двух низших заполненных уровней соответствует нуклонам в двух близких видоизмененных (поляризованных) α-кластерах. Распреде-

ление плотности вероятности для третьего уровня сходно с распределениями валентных нейтронов на рис. 6, 7. Таким образом, и модель ядерной молекулы и оболочечная модель объясняют положительное значение параметра квадрупольной деформации ядер <sup>9, 10</sup>Ве.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный поход к расчетам характеристик основного состояния ядер <sup>6, 7, 9, 10</sup>Ве может служить полезным дополнением к существующим более сложным теоретическим методам. Он позволяет достаточно просто определить зависимость энергии основного состояния от параметров потенциалов и вероятности различных конфигураций составляющих систему частиц.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Пенионжкевич Ю.Э. // ЯФ. 2011. Т. 74. С. 1641; Penionzhkevich Yu.E. // Phys. Atom. Nucl. 2011. V. 74. P. 1615.
- Пенионжкевич Ю.Э., Соболев Ю.Г., Самарин В.В. и др. // ЯФ. 2017. Т. 80. С. 525; Penionzhkevich Yu.E., Sobolev Yu.G., Samarin V.V. et al. // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 70. P. 928.
- Самарин В.В., Науменко М.А. // Изв. РАН Сер. физ. 2019. Т. 83. С. 460; Samarin V.V., Naumenko М.А. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. P. 411.
- Samarin V.V., Naumenko M.A. // Nuovo Cimento C. 2019. V. 42. P. 130.
- von Oertzen W., Freer M., Kanada En'yo Y. // Phys. Rep. 2006. V. 432. P. 43.
- 6. Freer M. // Rep. Prog. Phys. 2007. V. 70. P. 2149.
- Самарин В.В., Науменко М.А. // ЯФ. 2017. V. 80. С. 473; Naumenko M.A., Samarin V.V. // Phys. Atom. Nucl. 2017. V. 80. P. 877.
- Voronchev V.T., Krasnopol'sky V.M., Kukulin V.I. // J. Phys. G. 1982. V. 8. P. 649.
- Zhukov M.V., Danilin B.V., Fedorov D.V. et al. // Phys. Rep. 1993. V. 231. P. 151.
- Кукулин В.И., Краснопольский В.М., Миселхи М.А. и др. // ЯФ. 1981. Т. 34. С. 21; Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Miselkhi M.A. et al. // Sov. J. Nucl. Phys. 1981. V. 34. № 1. Р. 21.
- Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M., Voronchev V.T. et al. // Nucl. Phys. A. 1986. V. 453. P. 365.
- 12. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968
- 13. *Блохинцев Д.И*. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- 14. Шуряк Э.В. // УФН. 1984. Т. 143. С. 309; Shuryak E.V. // Sov. Phys. Usp. 1984. V. 27. P. 448.
- Shuryak E.V., Zhirov O.V. // Nucl. Phys. B. 1984. V. 242. P. 393.
- Самарин В.В., Науменко М.А. // Изв. РАН Сер. физ. 2016. Т. 80. С. 314; Samarin V.V., Naumenko М.А. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2016. V. 80. P. 283.

- 17. Naumenko M.A., Samarin V.V. // Supercomp. Front. Innov. 2016. V. 3. P. 80.
- 18. https://developer.nvidia.com/cuda-zone/.
- Перепёлкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г. Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики. М.: Ленанд, 2014.
- 20. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология СUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М.: ДМК, 2011.
- 21. http://hybrilit.jinr.ru/.
- 22. *Флюгее 3.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир. 1974. С. 106.
- 23. *Ву Т.Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969.
- Харрисон У. Псевдопотенциалы в теории металлов. М.: Мир, 1968.

- 25. http://nrv.jinr.ru/.
- 26. http://cdfe.sinp.msu.ru/services/radchart/radmain.html.
- 27. *Самарин В.В.* // ЯФ. 2015. Т. 78. С. 133; *Samarin V.V.* // Phys. Atom. Nucl. 2015. V. 78. P. 128.
- 28. Winther A. // Nucl. Phys. A. 1994. V. 572. P. 191.
- 29. Bando H. // Nucl. Phys. A. 1986. V. 450. P. 217.
- 30. Michel F., Ohkubo S., Reidemeister G. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1998. V. 132. P. 132.
- Lukyanov S.M., Harakeh M.N., Naumenko M.A. // World J. Nucl. Sci. Techn. 2015. V. 5. P. 265.
- 32. von Oertzen W. // Z. Phys. A. 1996. V. 354. P. 37.
- 33. von Oertzen W., Freer M., Kanada-En'yo Y. // Phys. Rep. 2006. V. 432. P. 43.
- Okabe S., Abe Y., Tanaka H. // Prog. Theor. Phys. 1977. V. 57. P. 866.
- 35. Okabe S., Abe Y. // Prog. Theor. Phys. 1979. V. 61. P. 1049.