ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия Физическая IX, 1945, № 1—2 Série Physique

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ и И. Е. ТАММ

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНЕРГИЯ — ВРЕМЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1. Наряду с соотношением неопределенности, относящимся к координате q и импульсу p, в квантовой механике рассматривается также соотношение неопределенности пары энергия — время.

Первое соотношение в форме неравенства

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}, \tag{1}$$

где Δq и Δp — соответственные стандарты*, а h — деленная на 2π постоянная Планка, вытекает, как известно, непосредственно из квантово-механического формализма. Что же касается обычных рассуждений о так называемом микроскопе Гейзенберга, об определении скорости при помощи Допплер-эффекта и т. п., то они по существу имеют целью выявить связь между измерениями координат и импульсов и квантово-механическим формализмом.

Совершенно иначе обстоит дело с соотношением

$$\Delta H \cdot \Delta T \sim h, \tag{2}$$

где ΔH — стандарт энергии, ΔT — некоторый промежуток времени, а знак $\sim$ означает, что левая часть по меньшей мере порядка правой.

Для его обоснования обычно ссылаются на тривиальное соотношение $\Delta\nu \cdot \Delta T \sim 1$, связывающее «неточность» $\Delta\nu$ измерения частоты монохроматического колебания с промежутком времени ΔT, в течение которого измерение производится, с одной стороны, и на соотношение: энергия $= h\nu$, с другой.

Однако уже неоднократно подчеркивалось то обстоятельство, что в нерелятивистской квантовой механике целесообразно считать энергию «observable» в смысле Дирака, соответствующей оператору Гамильтона данной механической системы. При таком определении нельзя, конечно, отождествлять энергию с умноженной на h частотой монохроматического колебания. Поэтому указанное обоснование теряет силу, а само соотношение (2) перестает быть содержательным.

Иногда вместо этого ссылаются на каноническую сопряженность энергии и времени. Но такая расплывчатая ссылка вряд ли может считаться содержательной уже по одному тому, что здесь остается открытым вопрос о том, что нужно понимать под ΔH и ΔT.

Повидимому, общего, вытекающего из основных положений квантовой механики обоснования соотношения (2) или другого аналогичного соотношения неопределенности, относящегося к энергии, до сих пор дано не было. Взамен этого рассматривались специальные случаи, причем для каждого из них давалось свое, отличное

---

* Стандартом, как известно, называется корень квадратный из среднего квадратичного отклонения от среднего.

от случая к случаю, определение величин ΔH и ΔT и показывалось, что определенные таким образом величины удовлетворяют соотношению (2).

2. Цель настоящей заметки — указать одно весьма общее соотношение неопределенности для энергии, которое, как и (1), вытекает из квантового формализма, но с учетом уравнения Шредингера.

В основе его лежит следующее соображение. Как известно, полная энергия замкнутой квантово-механической системы, вообще говоря, не имеет, в противоположность классике, одного определенного, постоянного во времени значения. Здесь постоянной остается в е р о я т н о с т ь измерить каждое из возможных значений энергии системы. В этом и состоит закон сохранения энергии в квантовой механике.

Только в частном случае стационарного состояния энергия вполне определена. Но в этом случае, как легко видеть, в с е динамические величины или, иначе, их функции распределения остаются постоянными.

Иными словами, о п р е д е л е н н о с т ь полной энергии системы влечет за собой п о с т о я н с т в о во времени всех динамических величин. Уже из этого можно сделать заключение, что существует общая зависимость между дисперсией полной энергии системы и изменением координат, импульсов и т. д. во времени.

Соотношение неопределенности, о котором идет речь, дает количественную формулировку этой зависимости.

Пусть R и S обозначают две какие-нибудь величины и одновременно соответствующие им эрмитовы операторы. Как известно, справедливы два следующие соотношения:

$$\Delta S \cdot \Delta R \geq \frac{1}{2} \overline{|RS - SR|}, \tag{3}$$

где ΔS и ΔR — стандарты величин S и R, а горизонтальная черта обозначает, как обычно, квантово-механическое среднее, и

$$h \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = i \overline{(HR - RH)} \tag{4}$$

(H — гамильтониан системы, не содержащий явно времени).

Полагая в (3) $S \equiv H$, мы на основании (3) и (4) получаем искомую формулировку соотношения неопределенности для энергии в форме следующего неравенства:

$$\Delta H \cdot \Delta R \geq \frac{h}{2} \left| \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} \right|. \tag{5}$$

Это соотношение связывает таким образом между собой стандарт ΔH полной энергии замкнутой системы, стандарт ΔR какой-нибудь динамической величины и изменение среднего значения этой величины.

Соотношению (5) может быть придана несколько иная форма. Оно не нарушится при замене в нем величины $\left| \frac{\partial \overline{R}}{\partial t} \right|$ величинами $\frac{\partial \overline{R}}{\partial t}$ или $-\frac{\partial \overline{R}}{\partial t}$. Проинтегрировав его затем от t до $t + \Delta t$, и приняв во внимание, что ΔH постоянно, получим

$$\Delta H \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2} \frac{|\overline{R}_{t+\Delta t} - \overline{R}_t|}{\widetilde{\Delta R}}, \tag{5a}$$

где справа в знаменателе стоит среднее за время Δt значение стандарта ΔR.

Иногда (особенно в случае непрерывного спектра собственных значений) целесообразно относить изменения среднего значения какой-нибудь величины к ее стандарту. Такое сравнение позволяет в ряде случаев судить об эффективности происшедшего изменения. Для иллюстрации можно сослаться на несколько аналогичное положение, с которым мы имеем дело при оценке разрешающей способности оптических инструментов.

В этих случаях удобно ввести специальное обозначение ΔT для минимального времени, за которое среднее значение некоторой величины изменяется на величину ее стандарта. ΔT можно назвать стандартным временем.

С этим обозначением (5а) может быть написано так:

$$\Delta H \cdot \Delta T \geq \frac{h}{2}. \tag{5b}$$

Из (5а) следует, что для того, чтобы какая-нибудь величина изменилась, необходимо не только, чтобы $\Delta H \neq 0$, но чтобы был отличен от нуля и средний стандарт самой величины (если $\Delta H \neq \infty$)*. Таким образом, динамическая величина не может изменяться, оставаясь все время лишенной дисперсии; этот результат, очевидный для случая дискретного спектра, не является таковым для спектра непрерывного. Далее, из (5а) следует, например, что если в какой-нибудь момент времени дисперсия величины R равна нулю, а среднее значение ее не остается постоянным, то вначале, т. е. для малых Δt, стандарт изменяется значительно быстрее, чем $\bar{R}$.

Характерной чертой приведенного соотношения неопределенности для энергии является то обстоятельство, что в него входит произвольная величина R, и что поэтому его физическое содержание различно в зависимости от выбора этой величины.

Неучетом этого обстоятельства и объясняется, повидимому, что отдельные конкретные задачи, к которым применялось соотношение (2), в ряде случаев оставались без взаимной связи.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим три примера. Пусть имеется одномерный волновой пакет. Если положить $R \equiv q$, то $\bar{R}$ есть центр тяжести пакета, $\widetilde{\Delta R}$ может рассматриваться как его средняя ширина, а ΔT — время прохождения пакета. Соотношение (5b) показывает, что точность локализации во времени прохождения пакета через какую-нибудь точку пространства находится в прямой зависимости от дисперсии полной энергии системы и не может быть большой при малой величине этой последней, причем (5b) дает количественное соотношение между ΔH и ΔT.

Этот пример приводится обычно и в связи с соотношением (2), но обоснование указанного результата дается в предположении, что движение происходит в отсутствии внешних сил. (5b) показывает, что результат справедлив для движения в любом потенциальном силовом поле.

Второй и третий примеры, которые сейчас будут приведены, тоже рассматривались нередко в связи с соотношением (2). Но при этом давалось новое определение ΔH и ΔT, и весь разбор шел вне всякой связи с первым примером. Здесь же все три примера являются частными случаями соотношения (5).

---

* Довольно часто приходится рассматривать состояния, стандарт энергии ΔH которых бесконечен (например, в тех случаях, когда энергия распределена по дисперсионной формуле $\left.\frac{\text{const}}{(H-H_0)^2+\Gamma^2}\right)$; так как применение соотношения (5) к таким случаям становится бессодержательным, то было бы весьма желательно найти более общее соотношение того же типа, как и (5).

Пусть нам дана система с двумя степенями свободы и пусть ее гамильтониан $H(q_1, q_2)$ имеет вид:

$$H(q_1, q_2) = H_1(q_1) + H_2(q_2) + \mu H_{12}(q_1, q_2).$$

Если μ мало или если член H_{12}—типа энергии взаимодействия при столкновении двух упругих частиц, то принято говорить о двух системах с одной степенью свободы, находящихся во взаимодействии друг с другом.

В этих предположениях $\overline{H}_1 + \overline{H}_2 \cong \overline{H}$; при известных условиях (при резонансе) $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ существенно изменяются во времени, между тем как их сумма остается приблизительно постоянной. В этом случае говорят о переходе энергии из одной системы в другую, называя $\overline{H}_1$ энергией первой, а $\overline{H}_2$ энергией второй системы.

Положим $R \equiv H_2$; тогда (5а) показывает, что чем меньше дисперсия полной энергии всей системы в целом, тем, вообще говоря, медленнее происходит переход энергии, или точнее: стандартное время перехода энергии из одной системы в другую не меньше, чем $\frac{h}{2\Delta H}$.

Наглядной иллюстрацией этого случая может служить одномерное соударение двух упругих частиц исчезающего размера и одинаковой массы, из которых первая имеет скорость, отличную от нуля, с малой дисперсией, а вторая находится почти в покое.

В плоскости q_1 и q_2 (q_1 и q_2 — координаты частиц) процесс соударения приближенно отображается отражением ограниченного и по длине и по ширине цуга волн от зеркала, помещенного под углом 45° к направлению q_1, причем волновая «линия» цуга перпендикулярна к q_1, а длина и ширина цуга весьма велики по сравнению с длиной волны; пусть длина цуга значительно больше ширины. До столкновения волновая функция состоит из цуга, распространяющегося вдоль q_1 по направлению к зеркалу. Пока цуг не дошел до зеркала, $\overline{H}_2 \approx 0$. Затем передняя часть цуга отражением заворачивается на 90°. Пока время Δt, прошедшее от начала отражения, мало, отраженная часть цуга заключает малое количество волн. Иными словами, ΔH_2 в этой стадии сравнительно велико, а $\overline{H}_2$ еще мало.

При дальнейшем продвижении цуга отношение $\overline{H}_2 / \Delta H_2$ растет, пока весь цуг волн не перейдет в направление q_2. Легко видеть также, что при уменьшении дисперсии энергии всей системы, что соответствует, например, бо́льшей длине первоначального цуга, все соответственные времена (в частности, стандартное время) увеличиваются, что также находится в качественном согласии с (5b).

Совсем другой смысл имеет известное соотношение, вытекающее из теории возмущений:

$$|(H_1 + H_2) - (H_{10} + H_{20})| \sim \frac{h}{t}, \tag{6}$$

где H_{10} и H_{20} означают начальные энергии взаимодействующих систем (или частиц) 1 и 2 в момент $t = 0$, а H_1 и H_2 — их энергии в момент t. Величина $H' = H_1 + H_2$, которую мы будем называть собственной энергией частиц, отнюдь не равна полной энергии системы $H = H_1 + H_2 + \mu H_{12}$, так что соотношение (6) не имеет отношения к неопределенности ΔH полной энергии системы, которая для всякой изолированной системы остается постоянной во времени.

Более того, если рассматривать не полную энергию H, а лишь собственную энергию частиц H', то все же, вопреки часто встречающемуся утверждению, соотношение (6) отнюдь не означает, что неопределенность собственной энергии частиц уменьшается по мере роста промежутка времени t, в течение которого эти частицы взаимодействуют. Действительно, вероятность того, что под влиянием заданного возмущения μH_{12} система за время t перейдет из начального состояния ψ_0 с собственной энергией $H_0' = H_{10} + H_{20}$ в состояние с собственной энергией $H' = H_1 + H_2$ пропорциональна осциллирующей во времени величине $\frac{\sin^2 (H' - H_0') t / h}{(H' - H_0')^2}$. Поэтому вероятность $w(\varepsilon, t)$ того, что H' будет в момент t отличаться от H_0' не меньше, чем на заданную величину ε, не стремится к нулю с ростом t.

Можно, однако, поставить вопрос по-иному. Разобьем результаты измерения состояния системы в момент t на два класса; в класс A отнесем те случаи, когда система в момент t оказалась в исходном состоянии ψ_0, а в класс B — все остальные случаи. По мере роста t вероятность случаев A падает, причем чем больше t, тем больше превалируют переходы системы в состояния, удовлетворяющие закону сохранения собственной энергии H' (резонанс); именно поэтому определенная выше вероятность $w(\varepsilon, t)$ не существенно изменяется во времени, несмотря на уменьшение со временем случаев A, соответствующих точному сохранению собственной энергии частиц. Иными словами, если откинуть случаи класса A и рассматривать относительную вероятность различных результатов измерения внутри класса B (обнимающего измененные по сравнению с начальным состояния системы), то такая относительная вероятность $w_B(\varepsilon, t)$ результатов измерений класса B, в которых величина $|H' - H_0'|$ в момент t не меньше заданной величины ε, будет уменьшаться со временем. Формула (6) и устанавливает связь между t и тем значением $\varepsilon = |(H_1 + H_2) - (H_{10} + H_{20})|$, при котором определенная таким образом вероятность $w_B(\varepsilon, t)$ становится сравнимой с единицей.

Нам не удалось пока установить связь между соотношением (6) и формулированным выше соотношением неопределенности (5) — (5b), хотя мы и склонны считать существование такой связи вполне вероятным.

В качестве третьего примера рассмотрим вопрос о ширине спектральных линий или, общее, о связи между «длительностью жизни» τ данного состояния системы ψ_0 и неопределенностью ΔH энергии этого состояния.

Обозначим через L проэкционный оператор, соответствующий состоянию системы ψ_0 и определяемый соотношением

$$L\psi = (\psi_0 \psi) \cdot \psi_0,$$

где

$$(\psi_0 \psi) = \int \psi_0^* \psi \, dx.$$

Одно из собственных значений оператора L равно 1, все остальные равны нулю. Поэтому

$$L^2 = L. \tag{7}$$

Математическое ожидание $\overline{L}$ равно вероятности того, что система находится в состоянии ψ_0; очевидно, что $\overline{L} \leqslant 1$.

На основании (7)

$$\Delta L = \sqrt{\overline{L^2} - (\overline{L})^2} = \sqrt{\overline{L} - (\overline{L})^2}.$$

Поэтому соотношение (5) принимает для оператора L вид*

$$\Delta H\cdot\sqrt{\overline{L}-(\overline{L})^2}\geq\frac{h}{2}\left|\frac{\partial\overline{L}}{\partial t}\right|. \tag{8}$$

Пусть при $t=0$ система находится в состоянии ψ_0, т. е. $\overline{L}(0)=1$. Тогда из (8) следует, что при $t>0$

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\overline{L}(t)}\geq\frac{\Delta H\cdot t}{h},$$

или

$$\overline{L}(t)\geq\cos^2\left(\frac{\Delta H\cdot t}{h}\right). \tag{9}$$

Если обозначить через τ время полураспада состояния ψ_0 (т. е. $L(\tau)=\frac{1}{2}$, если $L(0)=1$,) то из (9) получается хорошо известное (но уточненное в отношении числового множителя) соотношение между τ и неопределенностью ΔH энергии состояния ψ_0:

$$\tau\cdot\Delta H\geq\frac{\pi}{4}h. \tag{10}$$

Заметим еще, что в ряде вопросов, относящихся к измерениям, соотношение (5) дает часто возможность судить о величине промежутка времени, необходимом для получения достаточной «точности» измерения в тех или иных условиях.

4. Соотношение неопределенности (1) выводится обычно для так называемого чистого случая, т. е. в предположении существования волновой функции. То же самое предположение лежит в основе вышеприведенного вывода соотношения (5).

Однако, как (1), так и (5) справедливы и для общего случая «смеси». Это легко видеть из следующего.

Известно, что в общем случае смеси

$$\overline{R}=\sum p_i\int\varphi_i^*(R\varphi_i)\cdot dv, \tag{11}$$

где φ_i — некоторые функции, которые можно рассматривать как волновые функции тех чистых случаев, из которых смесь «составлена», а p_i — положительные числа, причем $\sum p_i=1$.

Мы сохраним горизонтальную черту без индекса для обозначения среднего значения какой-нибудь величины F по всей совокупности. Пусть далее

$$\overline{F}^i=\int\varphi_i^*(F\varphi_i)\,dv.$$

Тогда, согласно (11)

$$\overline{R}=\sum p_i\overline{R}^i \text{ и } (\Delta R)^2=\overline{(R-\overline{R})^2}=\sum p_i\overline{(R-\overline{R})^2}^i. \tag{12}$$

Наконец, обозначим еще

$$(\Delta_i R)^2=\overline{(R-\overline{R}^i)^2}^i.$$

Из (12)

$$(\Delta R)^2=\sum p_i\left\{\overline{R^2}^i-2\overline{R}\,\overline{R}^i+(\overline{R})^2\right\};$$

* Из (8), в частности, вытекает в соответствии с общим соотношением между скоростью изменения и стандартом произвольной величины, что экспоненциальный закон распада $\overline{L}(t)=e^{-\gamma t}$ может осуществляться лишь начиная с некоторого времени t, большего чем $t_0=\frac{1}{\gamma}\ln\left(1+\frac{h^2\gamma^2}{4\cdot\Delta H^2}\right)$.

но так как i-ый член суммы не меньше, чем* $p_i \overline{(R-\overline{R}^i)^2}^i = p_i (\Delta_i R)^2$, то мы получаем:

$$(\Delta R)^2 \geq \sum p_i (\Delta_i R)^2. \tag{13}$$

Пусть мы имеем две величины R и S и пусть

$$(\Delta_i R)^2 \ (\Delta_i S)^2 \geq a_i^2; \tag{14}$$

тогда справедливо неравенство:

$$(\Delta R)^2 \ (\Delta S)^2 \geq \left(\sum p_i a_i\right)^2. \tag{15}$$

Действительно, ввиду (13) и (14)

$$(\Delta R)^2 \ (\Delta S)^2 \geq \sum p_i (\Delta_i R)^2 \cdot \sum p_k (\Delta_k S)^2 \geq$$
$$\geq \sum_{i,\, k<i} p_i p_k \left\{ \left(\frac{\Delta_i R}{\Delta_k R}\right)^2 a_i^2 + \left(\frac{\Delta_k R}{\Delta_i R}\right)^2 a_k^2 \right\} + \sum_i p_i^2 a_i^2.$$

Член первой суммы справа со значками i и k не меньше, чем $2p_i p_k a_i a_k$, откуда непосредственно следует справедливость соотношения (15).

Пусть $S \equiv q$, $R \equiv p$. Согласно (1) и (14) $a_i = \frac{h}{2}$. Поэтому из (15) вытекает, что соотношение (1) остается справедливым и для смеси, так как ведь ΔR и ΔS суть стандарты соответственных величин для всей совокупности.

Чтобы применить (15) для обобщения соотношения (5), нужно принять во внимание, что все φ_i суть решения одного и того же уравнения Шредингера. Пусть $S \equiv H$, тогда, сравнивая (5) и (14), мы можем положить

$$a_i^2 = \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial \overline{R}^i}{\partial t}\right)^2. \tag{16}$$

Нетрудно далее показать, что

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial t} = \sum p_i \frac{\partial \overline{R}^i}{\partial t}.$$

Отсюда, принимая во внимание (15) и (16), видим, что соотношение неопределенности (5) справедливо и для общего случая смеси.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР
Москва

---

* Ибо из $(\overline{R}^i - \overline{R})^2 > 0$, следует, что $-2R\overline{R}^i + (\overline{R})^2 \geq -(\overline{R}^i)^2$.